

Олимпиада  
школьников по математике  
«ТИИМ-2022»  
Заключительный тур  
13 марта 2022 года  
6 класс



▷ 1. Если 42482 и 44506 разделить на одно и то же число, то получим соответственно остатки 20 и 22. Чему равен наибольший возможный делитель?

**Решение:** Вычтем остатки от деления и разложим на множители получившиеся числа:

$$42482 - 20 = 42462 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 337;$$

$$44506 - 22 = 44484 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 337.$$

Наибольший общий делитель этих чисел равен  $2 \cdot 3 \cdot 337 = 2022$ .

**Ответ:** 2022.

▷ 2. Часы показывают 20 часов 22 минуты. На сколько изменится угол между часовой и минутной стрелкой через 2022 минуты?

**Решение:** Минутная стрелка за 60 минут проходит полный оборот, значит, её скорость равна 6 градусов в минуту. В то же время часовая стрелка проходит двенадцатую часть круга, т.е. 30 градусов, и её скорость – 0,5 градуса в минуту.

В начальный момент времени часы показывали 20 часов 22 минут. Если принять за “ноль” вертикальное положение стрелок, то положение минутной стрелки будет определяться следующим образом: 22 минуты  $\cdot 6^\circ = 132^\circ$ . Часовая стрелка в начале 20-го часа уже была повернута на  $240^\circ$ , поэтому в указанный момент времени она повернётся ещё на 22 минут  $\cdot 0,5^\circ = 11^\circ$ . Таким образом, угол между часовой и минутной стрелками в начальный момент времени составляет  $\alpha = (240^\circ + 11^\circ) - 132^\circ = 119^\circ$ .

2022 минуты – это 33 часа 42 минуты, т.е. в конечный момент времени часы будут показывать 6 часов 4 минуты. Минутная стрелка при этом будет повернута на 4 минуты  $\cdot 6^\circ = 24^\circ$ , а часовая, которая в начале часа была расположена на  $180^\circ$ , через 4 минуты окажется под углом  $180^\circ + 4 \text{ минуты} \cdot 0,5^\circ = 182^\circ$ . Тогда угол между часовой и минутной стрелками составит  $\beta = 182^\circ - 24^\circ = 158^\circ$ , что на  $39^\circ$  больше угла  $\alpha$ .

**Ответ:** Увеличится на  $39^\circ$ .

▷ 3. В записи тринадцатизначного числа, состоящего из одних шестёрок, между некоторыми цифрами поставьте знак сложения так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 2022.

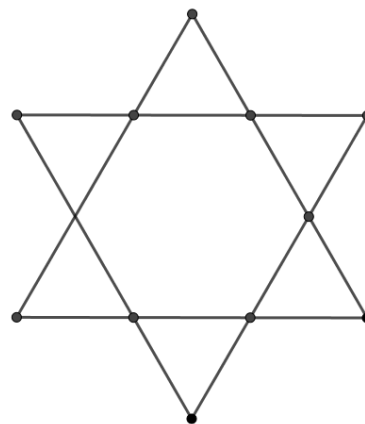
**Решение:** В искомой сумме не может быть чисел из четырёх шестёрок, и

должно встретиться как минимум три числа из трёх шестёрок, иначе оставшиеся двузначные числа дадут слишком маленькую сумму. Кроме того, чтобы в цифре единиц суммы стояла 2, необходимо складывать 2 или 7 чисел, на конце которых стоит 6. Таким образом, единственное возможное представление имеет вид:  $666 + 666 + 666 + 6 + 6 + 6 + 6$ . Нетрудно убедиться, что эта сумма действительно равна 2022.

**Ответ:**  $666 + 666 + 666 + 6 + 6 + 6 + 6$

▷ 4. Выберите на плоскости 12 точек и проведите через них 6 отрезков одинаковой длины так, чтобы на каждом отрезке было по 4 точки.

**Решение:** Один из возможных вариантов указан на рисунке



▷ 5. На доске была написана обыкновенная несократимая дробь, числитель и знаменатель которой – целые положительные числа. К её знаменателю прибавили числитель, получилась новая дробь. К числителю новой дроби прибавили её знаменатель, получилась третья дробь. Когда к знаменателю третьей дроби прибавили числитель, получилось  $\frac{13}{23}$ . Какая дробь была написана на доске?

**Решение:** Обозначим исходную дробь через  $\frac{m}{n}$  и выпишем последовательно получающиеся новые дроби:

$$\frac{m}{n}, \frac{m}{m+n}, \frac{m+(m+n)}{m+n} = \frac{2m+n}{m+n}, \frac{2m+n}{m+n+(2m+n)} = \frac{2m+n}{3m+2n} = \frac{13}{23},$$

откуда находим  $46m + 23n = 39m + 26n \Rightarrow 7m = 3n$ . И поскольку исходная дробь была несократимой, окончательно получаем  $m = 3, n = 7$ .

**Ответ:**  $\frac{3}{7}$ .

▷ 6. Какое наименьшее количество цифр нужно написать подряд, чтобы

вычёркиванием некоторых цифр можно было получить любое трёхзначное натуральное число от 100 до 999?

**Решение:** Поскольку среди трёхзначных чисел встречаются состоящие из трёх одинаковых цифр, каждую из цифр 1, 2, ..., 9 требуется записать как минимум три раза; кроме того, чтобы можно было получить числа 100, 200, ..., цифра 0 должна встретиться как минимум два раза. Если записать число

12345678901234567890123456789,

то получить из него любое трёхзначное можно следующим образом: для цифры сотен вычеркнуть все лишние цифры из первой группы 1...9, для цифры десятков – из средней группы 01...9, для цифры единиц – из последней группы 01...9.

**Ответ:** 29-значное число.

▷ **7.** Подряд записаны числа 1, 2, ..., 2021, 2022. Каких цифр при записи этих чисел использовано больше: двоек или единиц? На сколько?

**Решение:** В числах от 1 до 999 цифры 1 и 2 встречаются одинаковое число раз. В числах от 1000 до 1999 единица на первом месте встретится 1000 раз, значит, единиц будет на 1000 больше, чем двоек. В числах 2000, 2001, ..., 2021, 2022 встречаются 29 двоек и 13 единиц, значит, всего единиц будет на  $1000 - (29 - 13) = 984$  больше.

**Ответ:** единиц использовано больше на 984.

▷ **8.** Какая фраза без пробелов зашифрована в следующем многозначном числе

36131012101121257152911181619191010141206141201012121613141641618163115,

если каждая буква заменена её номером в алфавите русского языка?

**Решение:** Выпишем для наглядности пронумерованный русский алфавит (не забывая, что в русском языке – 33 буквы):

1	а	12	к	23	х
2	б	13	л	24	ц
3	в	14	м	25	ч
4	г	15	н	26	ш
5	д	16	о	27	щ
6	е	17	п	28	ъ
7	ё	18	р	29	ы
8	ж	19	с	30	ь
9	з	20	т	31	э
10	и	21	у	32	ю
11	й	22	ф	33	я

Расставим пробелы так, чтобы были отделены номера букв, определяющиеся однозначно:

3 6 13 10 1210 112125 7 15 29 1118 16 19 19 10 10 14 120 6 14 120 10  
121216 1314 16 4 16 18 16 3115

Будем подставлять буквы, предполагая, что двузначные числа в получившейся записи – это одна буква (если вдруг окажется, что там зашифрованы две буквы, первая из которых – “а” или “б”, это будет легко исправить). Получим следующий промежуточный результат:

в е л и 1210 112125 ё н ы 1118 о с с и и м 120 е м 120 и  
121216 1314 о г о р о 3115

Остальное подставляем методом подбора.

**Ответ:** Великий учёный России математик Колмогоров А Н

**Примечание:** Андрей Николаевич Колмогоров (1903 – 1987) – один из великих русских ученых, крупнейший математик XX столетия, гуманист, патриот, Герой Социалистического Труда, Лауреат Государственной и Ленинской премий, кавалер семи орденов Ленина, академик Российской академии наук и других наиболее престижных академий мира, почетный профессор множества университетов.



▷ **9.** В новогоднюю ночь 2021-2022 года на подоконнике стояли в ряд (слева направо) герань, бегония и кактус. Каждым утром Мария Ильинична (МИ), вытирая пыль, меняет местами цветок справа и цветок в центре. Днём Татьяна Юрьевна (ТЮ), поливая цветы, меняет местами тот, что в центре, с тем, что слева. В каком порядке будут стоять цветы в следующую новогоднюю ночь?

**Решение:** Посмотрим как меняется местоположение цветов (герань - Г, бегония - Б, кактус - К)

Герань Бегония Кактус				
	МИ	Г	К	Б
1.01	ТЮ	К	Г	Б
	МИ	К	Б	Г
2.01	ТЮ	Б	К	Г
	МИ	Б	Г	К
3.01	ТЮ	Г	Б	К

Как видим, по истечении трёх дней цветы возвращаются в то же положение, с которого начался год. 2022-й год – не високосный, значит, в нём 365 дней.  $365 = 3 \cdot 121 + 2$ , т.е. на утро 30.12 цветы будут расположены в порядке герань-бегония-кактус, а значит, в новогоднюю ночь они будут стоять в порядке бегония-кактус-герань.

**Ответ:** в порядке бегония, кактус, герань (слева направо).

▷ **10.** В Мексике в обращении находятся монеты номиналом в 1, 2, 5 и 10 песо. Сколькими способами можно разменять монету 10 песо?

**Решение:** Самая большая из подходящих разменных монет – 5 песо, и наибольшее их количество после размена – 2 штуки. Рассмотрим различные ситуации:

*1 случай: 2 монеты по 5 песо.* Очевидно, что другие монеты в размене не участвуют, т.е. существует всего один такой способ размена.

*2 случай: 1 монета по 5 песо.* Оставшиеся 5 песо можно по-разному разменять монетами в 2 и 1 песо:

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1,$$

итого 3 способа.

*3 случай: 0 монет по 5 песо.* То есть размен производится только монетами по 2 и 1 песо. Если начать с ситуации, в которой размен производится только монетами в 1 песо, и последовательно заменять пару таких монет на одну монету в 2 песо, получим 6 способов размена.

Итого мы нашли  $1 + 3 + 6 = 10$  способов размена.

**Ответ:** 10 способов.